

Differenciálszámítás

DERIVÁLÁSI FELADATOK

Összeállította: Bölcsföldi Tünde (bolcsfoldi-matek.webnode.hu).
Forrás: Sokszínű matematika - Az analízis elemei [Mozaiik Kiadó]

Összeg, szorzat, hányados deriváltja:

4.2. TÉTEL: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ az $x_0 \in D_f \cap D_g$ pontban differenciálható, akkor $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, és ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható ebben a pontban. Deriváltjaik pedig rendre:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

ha $g(x_0) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Összetett függvény deriváltja:

4.3. TÉTEL: Ha a $g(x)$ függvény $x_0 \in D_g$ pontban és az $f(x)$ függvény $g(x_0) \in D_f$ pontban differenciálhatók, akkor $f(g(x))$ is differenciálható x_0 pontban, és

$$(f(g))'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Inverz függvény deriváltja:

4.4. TÉTEL: Ha az $f(x)$ függvénynek létezik inverze az $]a; b[$ nyitott intervallumon, és $f(x)$ differenciálható az $f^{-1}(x_0)$ helyen, továbbá $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$, akkor az $f^{-1}(x)$ differenciálható $x_0 \in]a; b[$ pontban, és

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Összefoglalva:

Deriválási szabályok

I. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

II. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

III. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

IV. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

V. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

VI. $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Hatványfüggvény deriváltja:

A bevezető 3. példában láttuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja $f'(x) = 2x$. Vizsgáljuk most meg általában, hogy $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) hatványfüggvényekre milyen szabály vonatkozik!

4.5. TÉTEL: Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az $f(x) = x^n$ függvény D_f minden pontjában differenciálható, és

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Bizonyítás I.

Teljes indukciót használunk, mivel a kitevőben pozitív egész értékek vannak.

1. Vizsgáljuk meg néhány kezdeti értéket. Az $f(x) = x$ -re:

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$$

A példában láttuk, hogy

$$(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x.$$

2. Tételezzük fel, hogy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

3. Végül vizsgáljuk meg az x^{n+1} hatványfüggvényt:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = \\ &= x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n.\end{aligned}$$

Használtuk a szorzatra vonatkozó differenciálási szabályt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \text{ahol } f(x) = x \text{ és } g(x) = x^n.$$

Bizonyítás II.

Tekintsük a következő nevezetes szorzatot:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^1b^{n-2} + b^{n-1}).$$

A zárójelben levő hatványfüggvények folytonossága miatt:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1}. \end{aligned}$$



Következmény: Ha $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q \neq 0$, akkor bármely $x > 0$ -ra $F(x) = x^{\frac{p}{q}}$ függvény deriváltja:

$$F'(x) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Néhány elemi függvény deriváltfüggvénye:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x

Kidolgozott deriválási feladatok:

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x + 4$ polinomfüggvény deriváltfüggvényét.

Megoldás

Alkalmazzuk ebben a sorrendben az $(f \pm g)'$ (II.), $(c \cdot f)'$ (I.) deriválási szabályokat, illetve a konstans- és a hatványfüggvény deriváltját. Ennyire részletesen később nem szükséges kiírni:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^3 - 5x^2 + 8x + 4)' = \\ &= (3x^3)' - (5x^2)' + (8x)' + (4)' = 3(x^3)' - 5(x^2)' + 8(x)' + 4' = \\ &= 3(3x^2) - 5(2x) + 8(1) + 0 = 9x^2 - 10x + 8. \end{aligned}$$

Tehát a keresett deriváltfüggvény: $f'(x) = 9x^2 - 10x + 8$.

2. példa

Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[100]{x^7}$ és a $g(x) = \frac{5}{x^4}$ differenciálhányados függvényét.

Megoldás

Mindkét esetben ajánlott a törtekitevőjű alak, majd a hatványfüggvény deriválása:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{7}{100}}\right)' = \frac{7}{100} x^{\frac{7}{100}-1} = \frac{7}{100} x^{-\frac{93}{100}} = \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{x^{93}}};$$

$$g'(x) = (5x^{-4})' = 5(x^{-4})' = 5(-4x^{-5}) = -20x^{-5}.$$

3. példa

Deriváljuk a $h(x) = (3x + 1)(2x^3 - 5x^2)$ függvényt.

Megoldás I.

Fejtsük ki a szorzatot, és az 1. példához hasonlóan járjunk el:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [(3x + 1)(2x^3 - 5x^2)]' = [6x^4 - 13x^3 - 5x^2]' = \\ &= (6x^4)' - (13x^3)' - (5x^2)' = 6(x^4)' - 13(x^3)' - 5(x^2)' = \\ &= 6(4x^3) - 13(3x^2) - 5(2x) = 24x^3 - 39x^2 - 10x. \end{aligned}$$

Megoldás II.

Kezeljük szorzatként a függvényt, legyen $f(x) = 3x + 1$ és $g(x) = 2x^3 - 5x^2$, így $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. III. szerint:

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \\ &= (3x + 1)' \cdot (2x^3 - 5x^2) + (3x + 1) \cdot (2x^3 - 5x^2)' = \\ &= 3(2x^3 - 5x^2) + (3x + 1)(6x^2 - 10x) = \\ &= 6x^3 - 15x^2 + 18x^3 - 24x^2 - 10x = 24x^3 - 39x^2 - 10x. \end{aligned}$$

4. példa

Határozzuk meg a $h(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x$ deriváltfüggvényét.

Megoldás

Hasonlóan az előző példához:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \\ &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot \operatorname{tg} x + x^{\frac{1}{2}} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg} x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

5. példa

Írjuk fel az $f(x) = x \cdot e^x$ függvény görbéjének $x_0 = 1$ pontjában húzható érintőjének egyenletét. (7. ábra)

Megoldás

Az $f(x)$ függvény görbéjéhez $(x_0; f(x_0))$ pontban húzott érintő meredksége $f'(x_0)$, ahogyan azt korábban láttuk (Leibniz példája). Az egyenes iránytangenses egyenlete $y - y_0 = m(x - x_0)$, így az érintő egyenlete:

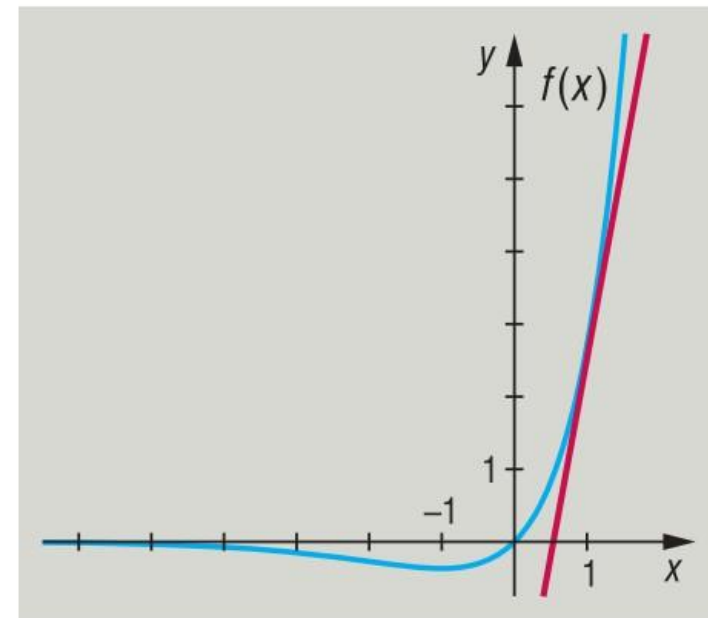
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Mivel

$$f'(x) = (x \cdot e^x)' = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x),$$

ezért $f'(1) = 2e$. Ugyanakkor $f(1) = e$, tehát az érintő egyenlete:

$$y = 2e \cdot (x - 1) + e = 2ex - e.$$



7. ábra

Az érintő egyenletét
tételként is megtanulhatjuk!

III. szabály

6. példa

Deriváljuk a $h(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + \cos x}$ függvényt.

Megoldás

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \\ &= \frac{(2x - 5) \cdot (x^3 + \cos x) - (x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^2 - \sin x)}{(x^3 + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

IV. szabály,
 $f(x) = x^2 - 5x + 6$,
 $g(x) = x^3 + \cos x$.

Nem fejtettük ki a számlálót,
mert most csak a deriválást
gyakoroljuk.

7. példa

Deriváljuk a $h(x) = \frac{1}{\sin x}$ függvényt.

Megoldás

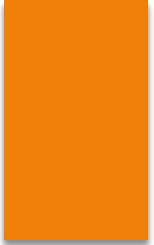
$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \\ &= \frac{1' \cdot \sin x - 1 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}. \end{aligned}$$

8. példa

Deriváljuk a $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$ függvényt.

Megoldás

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \\ &= \frac{(e^x)' \cdot x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x}{x^3} \cdot (x - 2). \end{aligned}$$



A legnehezebbek az összetett függvény differenciálási szabályára vezető feladatok. Ilyen esetben első lépésünk mindig az, hogy megpróbáljuk eldönteni, melyik a külső, illetve melyik a belső függvény.

A döntést nagyban elősegíti, ha egyrészt tisztában vagyunk a műveletek természetes sorrendjével (összeadás és kivonás, szorzás és osztás, hatványozás és logaritmus), másrészt kiigazodunk a zárójelek között.

Ha valamiért mégis gondot okoz a beazonosítás, akkor segíthet az is, ha elképzeljük magunk előtt, amint egy régebbi típusú számológépen lépésről lépésre kiszámolunk egy helyettesítési értéket. Amit elsőnek kell kiszámítani, az jó eséllyel a belső függvény, amit utána, az a külső függvény lesz.

9. példa

Deriváljuk a $h(x) = \sin^3 x$ függvényt.

Megoldás

Azonosítsuk a külső, belső függvényeket: $f(X) = X^3$ (külső függvény),
 $g(x) = \sin x$ (belső függvény).

Ekkor:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \\ &= (3\sin^2 x) \cdot (\cos x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

10. példa

Deriváljuk a $h(x) = \sin x^3$ függvényt.

Megoldás

Az előbbi feladathoz képest megfordul a külső, belső függvény. Most $f(X) = \sin X$ (külső függvény), $g(x) = x^3$ (belső függvény):

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \\ &= (\cos x^3) \cdot (3x^2) = 3x^2 \cdot \cos x^3. \end{aligned}$$

11. példa

Határozzuk meg a $h(x) = e^{\sin x}$ függvény deriváltfüggvényét.

Megoldás

A külső $f(X) = e^X$, a belső pedig $g(x) = \sin x$ függvény:

$$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

12. példa

Határozzuk meg a $h(x) = (2x + 1)^3$ függvény deriváltját.

Megoldás I.

A külső függvény $f(X) = X^3$, a belső pedig $g(x) = 2x + 1$:

$$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2.$$

Megoldás II.

Fejtsük ki ezt a nevezetes szorzatot az

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

azonosság alapján:

$$h'(x) = (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)' = 24x^2 + 24x + 6.$$

13. példa

Differenciáljuk a $h(x) = \arcsin \sqrt{x}$ függvényt.

Megoldás

Ez is kétszeresen összetett függvény, $f(X) = \arcsin X$ és $g(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}, \end{aligned}$$

ahol $0 < x < 1$.

Találkozhatunk többszörösen összetett függvények deriválásával is, pl.:

$$k(x) = f(g(h(x))) \quad \text{esetén} \quad k'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

A többszörösen összetett függvények deriváltját az ún. láncszabállyal fejtjük ki.

14. példa

Végül deriváljunk egy többszörösen összetett függvényt: $k(x) = \ln \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Megoldás

A legkülső függvény $f(X) = \ln X$, a középső $g(X) = \sqrt{X}$, a belső pedig $h(x) = \operatorname{tg} x$. Alkalmazzuk a láncszabályt, illetve a kétszeres szögek szinuszára vonatkozó addíciós összefüggést:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}, \end{aligned}$$

ahol $k\pi < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Feladatok:

1. Deriváljuk a következő hatványfüggvényeket:

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x + 60$;

b) $g(x) = (x + 3)^2 - 5$;

c) $h(x) = \sqrt{x}$;

d) $i(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$;

e) $j(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{12}{x} + \frac{1}{60}$.

2. Deriváljuk az alábbi szorzatfüggvényeket:

a) $f(x) = 10\sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

b) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$;

c) $h(x) = 16^x \cdot x^{16}$.

3. Deriváljuk a következő hányadosfüggvényeket:

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 6x + 10}{x^4 + 5x^2};$$

$$b) g(x) = 12 \operatorname{ctg} x;$$

$$c) h(x) = \frac{\ln x}{2x}.$$

4. Deriváljuk az alábbi összetett függvényeket:

$$a) f(x) = e^{(3x)};$$

$$b) g(x) = e^{(x^3)};$$

$$c) h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 5};$$

$$d) i(x) = \ln(x^2 + x)^5.$$

5. Deriváljuk a következő többszörösen összetett függvényeket:

$$a) f(x) = \sin[\cos(x^2)];$$

$$b) g(x) = \operatorname{tg}^3 \sqrt{\ln x}.$$